

**8.7 【解析】**∵ 集合  $A$  满足  $\{1\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$ , ∴  $A = \{1\}$  或  $\{1, 2\}$  或  $\{1, 3\}$  或  $\{1, 4\}$  或  $\{1, 2, 3\}$  或  $\{1, 2, 4\}$  或  $\{1, 3, 4\}$ , ∴ 满足条件的集合  $A$  的个数为 7.

**【一题多解】**利用公式知  $A$  的个数为  $2^3 - 1 = 7$ .

**9.  $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$  【解析】**∵  $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$ , ∴  $A = \{3, 5\}$ , 又∵  $B = \{x | ax - 1 = 0\}$ , ∴ ①当  $B = \emptyset$  时,  $a = 0$ , 显然  $B \subseteq A$ ;

②当  $B \neq \emptyset$  时,  $B = \left\{\frac{1}{a}\right\}$ , 由于  $B \subseteq A$ , ∴  $\frac{1}{a} = 3$  或  $\frac{1}{a} = 5$ , 即  $a = \frac{1}{3}$  或  $a = \frac{1}{5}$ .

综上所述,  $a$  构成的集合是  $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$ .

**10. 【解】**(1) 因为集合  $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , 所以  $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ , 又  $B = \{x | a \leq x \leq 3 - 2a\}$ ,  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \mathbb{R}$ , 所以  $\begin{cases} 3 - 2a \geq a, \\ a \leq 0, \\ 3 - 2a \geq 2, \end{cases}$  解得  $a \leq 0$ , 所以实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 0]$ .

(2) 若  $A \cap B = B$ , 则  $B \subseteq A$ , 当  $B = \emptyset$  时,  $3 - 2a < a$ , 解得  $a > 1$ ;

当  $B \neq \emptyset$  时, 有  $a \leq 1$ , 要使  $B \subseteq A$ , 则  $\begin{cases} a \geq 0, \\ 3 - 2a \leq 2, \end{cases}$  解得  $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

综上可知, 实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , 所以  $A \cap B \neq B$  时  $a$  的

取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  在  $\mathbb{R}$  中的补集, 即  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ , 即实数  $a$  的

取值范围为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ .

**11. 【解】**(1) ∵  $A = \{x | -6 < x < 10\}$ ,  $B = \{x | 3m - 1 < x < 2m + 1\}$ , 又  $A \cup B = A$ , ∴  $B \subseteq A$ , ①当  $B = \emptyset$  时, 满足  $B \subseteq A$ , ∴  $3m - 1 \geq 2m + 1$ , ∴  $m \geq 2$ ;

②当  $B \neq \emptyset$  时, 又  $B \subseteq A$ ,  $\begin{cases} m < 2, \\ 3m - 1 \geq -6, \\ 2m + 1 \leq 10, \end{cases}$  ∴  $-\frac{5}{3} \leq m < 2$ , 综合①②可得, 实数  $m$  的取值范围为  $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$ .

(2) ∵  $A \cap B = \{x | a < x < b\}$  且  $b - a = 2$ , ∴  $B \neq \emptyset$ , ∴  $3m - 1 < 2m + 1$ , ∴  $m < 2$ , ∴  $3m - 1 < 5$ ,  $2m + 1 < 5$ , ∴  $A \cap B = B = \{x | 3m - 1 < x < 2m + 1$ , 且  $m < 2\}$ , 或  $A \cap B = \{x | -6 < x < 2m + 1$ , 且  $m < 2\}$ . ①当  $A \cap B = B = \{x | 3m - 1 < x < 2m + 1$ , 且  $m < 2\}$  时, 又  $A \cap B = \{x | a < x < b\}$  且  $b - a = 2$ ,

$\begin{cases} m < 2, \\ 3m - 1 \geq -6, \\ 2m + 1 - (3m - 1) = 2, \end{cases}$  ∴  $m = 0$ ;

②当  $A \cap B = \{x | -6 < x < 2m + 1$ , 且  $m < 2\}$  时, 又  $A \cap B = \{x | a < x < b\}$  且  $b - a = 2$ ,

$\begin{cases} m < 2, \\ 3m - 1 < -6, \\ 2m + 1 - (-6) = 2, \end{cases}$  ∴  $m = -\frac{5}{2}$ ,

综合①②可得, 实数  $m$  的取值范围为  $\left\{-\frac{5}{2}, 0\right\}$ .

### 985 冲刺专题一 集合新定义问题

**1. C 【解析】**由于  $M = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$ ,  $N = \{x | x > 2\}$ , 所以  $M \cup N = \{x | x \geq 0\}$ ,  $M \cap N = \{x | 2 < x \leq 3\}$ , 所以  $M \ast$

$N = \{x | 0 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x > 3\}$ . 故 C 正确.

**2. A 【解析】**若  $M = \{-1, 0, 1, 3\}$ ,  $N = \{1, 3, 5\}$ , 则  $M - N = \{-1, 0\}$ ,  $N - M = \{5\}$ , 则  $(M - N) \cup (N - M) = \{-1, 0, 5\}$ , 所以  $|(M - N) \cup (N - M)| = 3$ . 故 A 正确.

**3. C 【解析】**由题知集合  $A$  含有 -2, 1 两个元素,  $B$  含有 -1, 2 两个元素, 得  $A = \{-2, 1\}$ ,  $B = \{-1, 2\}$ , 又∵  $-2 \times (-1) = 2$ ,  $-2 \times 2 = -4$ ,  $1 \times (-1) = -1$ ,  $1 \times 2 = 2$ , ∴  $A \odot B = \{-4, -1, 2\}$ , ∴  $-4 \times (-1) \times 2 = 8$ . 故 C 正确.

**4. A 【解析】** $8^1 = 8$ , 所以 8 是自恋数;  $2^2 + 3^2 = 13 \neq 23$ , 所以 23 不是自恋数;  $8^2 + 1^2 = 65 \neq 81$ , 所以 81 不是自恋数;  $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$ , 所以 153 是自恋数;  $2^3 + 5^3 + 4^3 = 197 \neq 254$ , 所以 254 不是自恋数;  $3^3 + 7^3 + 0^3 = 370$ , 所以 370 是自恋数. 所以集合  $B = \{8, 153, 370\}$ , 所以  $B$  的真子集个数为  $2^3 - 1 = 7$ . 故 A 正确.

**5. C 【解析】**由题意, 对于任意两个非空数集,  $d_{AB} \geq 0$ , 当  $\min A = \min B$  时, 说明集合  $A, B$  中最小的元素相同, 故  $d_{AB} = 0$ , 故①正确; 取  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{0, 2\}$ , 满足  $\min A > \min B$ , 但  $d_{AB} = 0$ , 故②错误;

若  $d_{AB} = 0$ , 则集合  $A, B$  中存在相同的元素, 故  $A \cap B \neq \emptyset$ , 故③正确;

令  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{3, 4\}$ , 则  $d_{AB} = 0$ ,  $d_{BC} = 0$ ,  $d_{AC} = 1$ , 但是  $d_{AB} + d_{BC} < d_{AC}$ , 所以  $d_{AB} + d_{BC} \geq d_{AC}$  不成立, 故④错误.

综上所述, 真命题只有①③共 2

个. 故 C 正确.

**6. BCD** 【解析】 $A \otimes B = \{z | z = (x+y) \cdot (x-y), x \in A, y \in B\}$ ,  $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ ,  $B = \{1, \sqrt{2}\}$ , 当  $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$  时,  $z = 0$ ; 当  $x = \sqrt{2}, y = 1$  时,  $z = 1$ ; 当  $x = \sqrt{3}, y = 1$  时,  $z = 2$ ; 当  $x = \sqrt{3}, y = \sqrt{2}$  时,  $z = 1$ , 故 A 错误, B 正确;  $A \otimes B = \{0, 1, 2\}$ , 故 C, D 正确.

**7. 【解】**由题意知, 集合  $A = \{(1, 0), (0, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ , 集合  $B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (2, 0), (-1, 0), (-2, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, -1), (-1, 1), (1, -2), (-2, 1), (2, -1), (-2, -2), (-1, -1), (2, -2), (-2, -1), (-2, 2), (-1, 2), (-1, -2)\}$ , 因为集合  $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$ , 所以集合  $A \oplus B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, -1), (1, -2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, -1), (2, -2), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-2, -3), (0, -3), (2, -3), (-1, 3), (-1, -3), (1, 3), (2, 3), (0, 3), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, 1), (1, -3), (-3, -1), (-3, 0), (-3, -2)\}$ , 所以  $A \oplus B$  含有 45 个元素.

**8. (1) 【解】**因为集合  $A = \{2, 5\}$ ,  $S = \{x | x = a + b, a, b \in A\}$ ,  $T = \{x | x = |a - b|, a, b \in A\}$ , 所以由  $2 + 2 = 4$ ,  $2 + 5 = 7$ ,  $5 + 5 = 10$ , 可得  $S = \{4, 7$ ,

$10\}$ . 由于  $|2 - 2| = 0$ ,  $|5 - 5| = 0$ ,  $|2 - 5| = 3$ , 可得  $T = \{0, 3\}$ .

**(2) 【证明】**由于集合  $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 则集合  $T$  的元素在  $0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3$  中, 且  $0 < x_2 - x_1 < x_3 - x_1 < x_4 - x_1, x_4 - x_3 < x_4 - x_2 < x_4 - x_1$ , 而  $A = T$ , 故  $A$  中最大元素  $x_4$  必在  $T$  中, 而  $x_4 - x_1$  为 7 个元素中的最大者, 故  $x_4 = x_4 - x_1$ , 即  $x_1 = 0$ , 故  $A = \{0, x_2, x_3, x_4\}$ , 故  $T$  中的 4 个元素为  $0, x_2, x_3, x_4$ , 又  $x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3$  与  $x_2, x_3, x_4$  重复, 而  $0 < x_3 - x_2 < x_3$ , 故  $x_3 - x_2 = x_2$ , 即  $x_3 = 2x_2$ , 而  $0 < x_4 - x_3 < x_4$ , 故  $x_4 - x_3 = x_2$  或  $x_4 - x_3 = x_3$ . 若  $x_4 = 2x_3 = 4x_2$ , 则  $A = \{0, x_2, 2x_2, 4x_2\}$ ,  $4x_2 - x_2 = 3x_2 \notin T$ , 与题设矛盾. 故  $x_4 - x_3 = x_2$ , 即  $x_4 + x_1 = x_3 + x_2$ .

## §2 常用逻辑用语

### 2.1 必要条件与充分条件

#### 基础满分

**1. A** 【解析】因为  $\{x | 0 < x < 2\} \not\subseteq \{x | -1 < x < 3\}$ , 所以  $p$  是  $q$  的充分不必要条件. 故 A 正确.

**2. A** 【解析】因为当  $a > 1$  时, 一定有  $a^2 > 1$ ; 当  $a^2 > 1$  时,  $a > 1$  或  $a < -1$ , 所以“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的充分不必要条件. 故 A 正确.

**3. B** 【解析】荀子的名言表明积跬步未必能至千里, 但要至千里必须积跬步, 故“积跬步”是“至千里”的必要不充分条件. 故 B 正确.

**4. B** 【解析】由题意,  $a \neq 0$ , 当  $a > 0$  时, 不等式  $a^2 x^2 > 1$ , 即  $x^2 > \frac{1}{a^2}$ , 解得  $x < -\frac{1}{a}$  或  $x > \frac{1}{a}$ ;

当  $a < 0$  时, 不等式  $a^2 x^2 > 1$ , 即  $x^2 > \frac{1}{a^2}$ , 解得  $x < \frac{1}{a}$  或  $x > -\frac{1}{a}$ .

对于  $p$ : 当  $a > 0$  时, 为  $\{x | x < -\frac{1}{a} \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\}$ ; 当  $a < 0$  时, 为  $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\}$ .

所以当  $x < -\frac{1}{a}$  或  $x > \frac{1}{a}$  时, 一定有  $a^2 x^2 > 1$ , 但当  $a^2 x^2 > 1$  时, 不一定有  $x < -\frac{1}{a}$  或  $x > \frac{1}{a}$ , 即  $q$  可以推出  $p$ , 但  $p$  推不出  $q$ , 则  $p$  是  $q$  的必要不充分条件. 故 B 正确.

**5. CD** 【解析】根据题意,  $0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow$

$x > 1$ , 分析选项, 使不等式  $0 < \frac{1}{x} < 1$  成立的一个充分不必要条件是  $x > 2$  或  $1 < x < 3$ . 故 CD 正确.

**6. D** 【解析】由  $x^2 \leq 4$  得  $-2 \leq x \leq 2$ , “ $-2 \leq x \leq 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的充要条件, 故 A 错误;

$\{x | -2 \leq x \leq 2\}$  与  $\{x | x < 2\}$  之间没有包含关系, “ $x < 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的既不充分也不必要条件, 故 B 错误;

$\{x | -2 \leq x \leq 2\}$  是  $\{x | x \leq 2\}$  的真子集, “ $x \leq 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的必要不充分条件, 故 C 错误;

$\{x | 0 < x < 2\}$  是  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$  的真子集, “ $0 < x < 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的充分不必要条件, 故 D 正确.

**7. D** 【解析】对于 A, 显然是充要条件, 故错误;

对于 B, 由“ $0 < x < 2$ ”可推出“ $0 < x < 4$ ”, 即为充分条件, 故错误;

对于 C, “ $x < 0$ ”不能推出“ $0 < x < 4$ ”,